Cours d'introduction à la recherche 2024-2025

Abel Lacabanne et Louis-Hadrien Robert

Semestre 1 : algèbres de Hopf

L'objectif est d'aborder la notion d'algèbre de Hopf et d'étudier les catégories de modules associées.

On commencera par introduire la notion de produit tensoriel d'espaces vectoriels et de catégorie, avec comme objectif la définition de catégorie monoïdale. On s'appuiera sur *Algebra* de S. Lang et un petit peu de *Categories for the working mathematician* de S. MacLane. Afin d'illustrer ces notions, on donnera l'exemple du foncteur monoïdal "algèbre extérieure" de vect munie de la somme directe, vers vect munie du produit tensoriel.

La suite portera sur les algèbres de Hopf proprement dites en suivant, avec quelques escapades, les chapitres 1 à 7 de *Hopf Algebras* de M. Sweedler. En particulier, les catégories de (co)modules sur une algèbre de Hopf seront un exemple naturel de catégorie monoïdale. On prendra soin d'étudier les exemples construits à partir de groupes finis et d'algèbres de Lie.

Enfin, pour conclure, on définira l'algèbre de mélange (Shuffle algebra) et on s'intéressera à ses propriétés universelles en suivant le chapitre 12 *Hopf Algebras* de M. Sweedler.

En plus des références données, il pourra être utile de consulter *Hopf Algebras* de D. Radford, *Quantum groups* de C. Kassel (notamment pour le calcul graphique) et les notes de cours de C. Schweigert.

Semestre 2 : Groupes quantiques et utilisation en topologie de petites dimensions

L'objectif de ce cours est de construire des groupes quantiques et d'en voir deux utilisations en topologie. Ces groupes quantiques sont des algèbres de Hopf ayant des structures supplémentaires intéressantes.

Afin de comprendre directement le lien avec les noeuds, on commencera par introduire la notion de R-matrice, d'algèbre de Hopf quasi-triangulaire et d'algèbre de Hopf enrubannée. On expliquera ensuite comment une algèbre de Hopf enrubannée permet de construire des invariants d'enchevêtrements. On s'attachera ensuite à comprendre le cas de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, en premier lieu dans le cas où q est un paramètre formel, puis dans le cas où q est une racine de l'unité. On suivra pour cela le Chapitre 4 (sections 1 et 2) de *Quantum Invariants* de T. Ohtsuki.

Dans une deuxième partie en s'attachera à comprendre une procédure générale, dite double de Drinfel'd, qui permet de construire des algèbres de Hopf quasi-triangulaires et de ce fait des catégories tressées et enrubannées. On se basera sur l'exemple $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ avec lequel on se sera déjà familiarisé. Pour ce faire, on suivra le chapitre 9 de *Quantum Groups* de C. Kassel.

Finalement, si le temps le permet, on expliquera comment utiliser une catégorie tressée pour définir des invariants de variétés de dimension 3 (dit invariants de Turaev–Viro) en suivant le début de *Turaev–Viro Invariants as an Extended TQFT* par B. Balsam et A. Kirillov Jr.

En plus des références données, il pourra être utile de consulter les notes de cours de C. Schweigert.

Références

[1] Christian Kassel. *Quantum groups*, volume 155 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[2] Alexander Kirillov Jr. and Benjamin Balsam. Turaev-Viro invariants as an extended TQFT. *arXiv e-prints*, 2010. arXiv:1004.1533.

[3] Serge Lang. *Algebra*, volume 211 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2002.

[4] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.

[5] Tomotada Ohtsuki. *Quantum invariants*, volume 29 of *Series on Knots and Everything*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2002. A study of knots, 3-manifolds, and their sets.

[6] David E. Radford. *Hopf algebras*, volume 49 of *Series on Knots and Everything*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2012.

[7] Christoph Schweigert. Hopf algebras, quantum groups and topological field theory. `https://www.math.uni-hamburg.de/home/schweigert/skripten/hskript.pdf`.

[8] Moss E. Sweedler. *Hopf algebras*. Mathematics Lecture Note Series. W. A. Benjamin, Inc., New York, 1969.